Matematica finanziaria: svolgimento degli esercizi 31, 32, 33 e 34

Esercizio 31. Calcolare il montante di 700€, sapendo che il tasso istantaneo di interesse $\delta(t)$ è dato da

$$\delta = \begin{cases} 0.10 & \text{il primo anno} \\ 0.20 & \text{i successivi 5 mesi} \\ 0.15 & \text{i restanti 7 mesi} \end{cases}$$

Svolgimento. Prima di tutto, osserviamo che l'esercizio non è ben posto: non viene infatti specificato se t misura il tempo in anni, in mesi, o in qualcos'altro...

Assumiamo che t misuri il tempo in anni, e scriviamo $\delta(t)$ in una forma più matematica:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0.10 & t \in [0, 1] \\ 0.20 & t \in (1, 1 + \frac{5}{12}] \\ 0.15 & (1 + \frac{5}{12}, 2] \end{cases}$$

Infine, applichiamo la formula integrale

$$r(t) = e^{\int_0^t \delta(u) du}$$

per ottenere

$$M(2) = 700 \cdot r(2) = 700e^{0.10 + \frac{5}{12}0.20 + \frac{7}{12}0.15}.$$

■

Esercizio 32. Si consideri un gruppo di $l(x)$ persone tutte della stessa età x e vive, che decidono di versare una quota C pro capite in un fondo comune che verrà investito con la legge in due variabili

$$r(x, y) = e^{y^2 - x^2}$$

fino al compimento dell'età $y > x$ di questo gruppo di persone. In tale data, le $l(y) \leq l(x)$ persone rimaste vive si spartiranno il montante di quanto investito al tempo x. Determinare il fattore di capitalizzazione dei sopravvissuti, e dire se risulta scindibile o meno.

Svolgimento. All'età y il montante determinato dall'investimento di $C \cdot l(x)$ sarà

$$C \cdot l(x) \cdot r(x, y)$$

e corrispondentemente la somma incassata da ciascun sopravvissuto sarà

$$\frac{C \cdot l(x) \cdot r(x, y)}{l(y)}$$

Il fattore di capitalizzazione richiesto sarà allora

$$r_s(x, y) = \frac{l(x) \cdot r(x, y)}{l(y)}$$

Poiché r è scindibile, si avrà

$$r(x, y) = \frac{r_1(y)}{r_1(x)}$$

per una legge finanziaria r_1 in una variabile. Ma allora

$$r_s(x, y) = \frac{l(x) \cdot r(x, y)}{l(y)} = \frac{r_1(y)/l(y)}{r_1(x)/l(x)}$$

e quindi anche r_s è scindibile.

Risulta interessante l'interpretazione della forza di interesse $\delta_s(x, y)$:

$$\delta_s(x, y) = \frac{\partial(\ln r_1(y) - \ln l(y) - \ln r_1(x) + \ln l(x))}{\partial y} = \frac{r_1'}{r_1} - \frac{l'}{l} = \delta(y) + \mu(y)$$

dove δ è la forza di interesse di r, e μ è una intensità istantanea "di mortalità". Si vede allora che quanto spetta a coloro che sopravvivono cresce nel tempo, non solo per motivi finanziari (il capitale investito sta rendendo secondo δ), ma anche per motivi demografici (più grande μ, più persone muoiono, più alta sarà la quota per ciascun sopravvissuto). ■

Esercizio 33. Calcolare il regime di proseguimento associato a:

1. $e^{i(y^2-x^2)}$.
2. e^{it}.
3. $1 + i\log(1 + y^2 - x^2)$.
4. $1 + it^2$.

Svolgimento. Il regime di proseguimento è un regime con una variabile in più di quella di partenza. Se il regime di partenza è in 2 variabili, il regime di proseguimento sarà in 3 variabili (casi 1 e 3), altrimenti, se il regime di partenza è in 1 variabile, il regime di proseguimento sarà in 2 variabili (casi 2 e 4). Considerando che in ogni caso il regime di proseguimento si trova scontando e poi capitalizzando, abbiamo:

1. $r_p(x, y, z) = r(x, z)/r(x, y) = e^{i(z^2-x^2)}/e^{i(y^2-x^2)} = e^{i(z^2-y^2)}$.
2. $r_p(x, y) = r(y)/r(x) = e^{iy}/e^{ix} = e^{i(y-x)}$.
3. $r_p(x, y, z) = (1 + i\log(1 + z^2 - x^2))/(1 + i\log(1 + y^2 - x^2))$.
4. $r_p(x, y) = (1 + iy^2)/(1 + ix^2)$.

Notare che 1 e 2 sono particolari (il regime di proseguimento coincide con il regime di partenza). Infatti sono esempi di regimi *scindibili.* ■

Esercizio 34. Per ciascuno dei regimi dell'esercizio 33, calcolare la forza di interesse.

Svolgimento. In 2 variabili, la forza d'interesse è data da

$$\delta(x, y) = \frac{r_y(x, y)}{r(x, y)}$$

dove r_y denota la derivata parziale di r rispetto a y. Calcoliamola ad esempio per il regime 1:

$$r(x, y) = e^{i(y^2-x^2)} \Rightarrow \delta(x, y) = \frac{2ye^{i(y^2-x^2)}}{e^{i(y^2-x^2)}} = 2y.$$

Come si vede, la forza d'interesse non dipende da x, e dunque il regime dato da 1 è scindibile.

In 1 variabile, la forza d'interesse è data da

$$\delta(t) = \frac{r'(t)}{r(t)}$$

dove r' denota la derivata di r. Calcoliamola ad esempio per il regime 4:

$$r(t) = 1 + it^2 \Rightarrow \delta(t) = \frac{2it}{1 + it^2}.$$

Come si vede, la forza d'interesse non è costante, e dunque il regime dato da 4 non è scindibile. ■